Topología diferencial I

Examen 1

Fecha de aplicación	**5 de marzo**
Puntos requeridos	**10**
Puntos máximos posibles	**13**

Escoge y resuelve cualquier combinación de ejercicios que sume 10 puntos.

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea M una m-variedad topológica.

(a) (1 punto) Demuestra que M es un espacio localmente compacto y localmente conexo.

(b) (1 punto) Demuestra que M es localmente simplemente conexo.

Ejercicio 2 — 5 puntos

Sea $X \coloneqq \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2 \text{ y } z \geq 0\}$.

(a) (2 puntos) Demuestra que X no es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

(b) (1 punto) Demuestra que X admite una estructura de variedad diferenciable.

(c) (1 punto) Demuestra que se puede definir dicha estructura de tal forma que la función de inclusión $i : X \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable.

(d) (1 punto) Calcula la imagen de $d_0 i$ como subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Si $f : N \to M$ es una función diferenciable entre dos variedades, decimos que es un *encaje* si $f(N)$ es una subvariedad de M y además $f : N \to f(N)$ es un difeomorfismo.

(a) (1 punto) Demuestra que si M y N tienen la misma dimensión y f es un encaje, entonces f es una función abierta.

(b) (1 punto) Demuestra que si $f : N \to M$ es un encaje y se cumple:
- N es compacta,
- M es conexa,
- N y M tienen la misma dimensión,

entonces f es un difeomorfismo entre M y N.

Ejercicio 4 — 4 puntos

Considera la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in \mathbb{Z}^2.$$

Denotamos por $\mathbb{T}^2$ al cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ y por $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ la proyección.

(a) (1 punto) Demuestra que existe una única estructura diferenciable para $\mathbb{T}^2$ tal que la proyección π es localmente un difeomorfismo.

(b) (2 puntos) Sea

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \mathbb{Z},$$

es decir, M es una matríz invertible con entradas enteras. Demuestra que la acción lineal de M sobre $\mathbb{R}^2$ desciende al cociente y da lugar a un difeomorfismo de $\mathbb{T}^2$ sobre si mismo.

(c) (1 punto) Calcula la derivada de dicho difeomorfismo con respecto a la base que corresponde a la base canónica de $\mathrm{T}_p \mathbb{R}^2$ bajo π.

Fin del examen.