Topología diferencial I

Examen 2

Fecha de aplicación	**2 de abril**
Puntos requeridos	**10**
Puntos máximos posibles	**25**

Escoge y resuelve cualquier combinación de ejercicios que sume 10 puntos.
En lo que sigue, denotaremos los haces triviales de dimensión n por ε^n, siempre y cuando se sobreentienda la variedad base.

Ejercicio 1 — 8 puntos

Sean $\xi_1 = (E_1, p_1, M)$ y $\xi_2 = (E_2, p_2, M)$ dos haces vectoriales sobre una varidad diferenciable M. Para cada una de las siguientes afirmaciones demuestrala si es verdadera o exhibe un contraejemplo si no:

(a) (2 puntos) Si $f : \xi_1 \to \xi_2$ es un homomorfismo de haces, entonces

$$\{v \in E_1 \mid f(v) = 0 \in E_2|_{p_1(v)}\} \subseteq E_1$$

forma un subhaz de ξ_1.

(b) (2 puntos) Si $f : \xi_1 \to \xi_2$ es un homomorfismo de haces, entonces

$$\{w \in E_2 \mid f(v) = w \text{ para algún } v \in E_1\} \subseteq E_2$$

forma un subhaz de ξ_2.

(c) (2 puntos) Todo subhaz de un haz trivial es trivial también.

(d) (2 puntos) Si ξ_1 es un subhaz del haz ξ_2 entonces existe un haz η tal que $\xi_2 \cong \xi_1 \oplus \eta$.

Ejercicio 2 — 2 puntos

Demuestra que si σ es una sección diferenciable de un haz $\xi = (E, p, M)$, entonces su imagen $\sigma(M)$ es una subvariedad de E difeomorfa a M.

Ejercicio 3 — 3 puntos

Demuestra que si un haz ξ admite m secciones linealmente independientes, entonces se cumple que:

$$\xi \cong \varepsilon^m \oplus \eta$$

donde η es otro haz sobre la misma variedad.

Ejercicio 4 — 2 puntos

Demuestra que si n es impar, entonces se cumple:

(a) (1 punto) $T\mathbb{S}^n$ admite una sección que no se anula en ningún punto.

(b) (1 punto)

$$T\mathbb{S}^n \cong \varepsilon^1 \oplus \xi$$

para algún haz ξ.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Demuestra que $T\mathbb{S}^n \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^{n+1}$.

Ejercicio 6 — 4 puntos

Demuestra que cualquiera (máximo una) de las siguientes variedades son paralelizables:

(a) (2 puntos) $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

(b) (3 puntos) $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$

(c) (4 puntos) $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^5$

Ejercicio 7 — 2 puntos

Demuestra que si $T\mathbb{S}^n$ tiene una sección que no se anula en ningún punto entonces la función identidad $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es homotópica a la función antípoda:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

Definición. *Una **métrica riemanniana** g sobre un haz vectorial $\xi = (E, p, M)$ es una función*

$$g : \{(v, w) \in E \times E \mid p(v) = p(w)\} \to \mathbb{R}$$

tal que restringida a cada fibra es un producto interno y además se cumple que si σ_1 y σ_2 son secciones de ξ definidas en un abierto $\mathcal{U}$, entonces la función $g \circ (\sigma_1 \times \sigma_2)$ es una función lisa.

Ejercicio 8 — 2 puntos

Sea g una métrica riemanniana sobre un haz ξ. Demuestra que en una vecindad de cualquier punto existen marcos para ξ tales que en cada fibra son bases ortonormales con respecto a g.

Fin del examen.