0.1. Ejercicios de Variedades Topológicas y Diferenciables

1. Demuestra que todo abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ es la unión numerable de bolas cerradas.

2. Demuestra que todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ es la unión numerable de compactos.

3. Demuestra que los conjuntos $\mathcal{M}_{m\times n}(n,\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(m,\mathbb{R})$ son abiertos en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, donde
$$\mathcal{M}_{m\times n}(k,\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rank}(A) = k\}.$$

4. Sea M una m-variedad. Demuestra que M es un espacio localmente compacto y localmente conexo.

5. Sea M una m-variedad. Demuestra que si M es conexa, entonces es conexa por trayectoria.

6. Sea M una m-variedad compacta. ¿Existe un atlas con una sola carta?

7. Demuestra que el atlas $\{(U_i^{\pm}, \phi_i^{\pm}\}_{i=1}^{n+1}$ de $\mathbb{S}^n$ es suave.

8. El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ también se puede considerar como el espacio cociente de $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ modulo la relación de equivalencia $\sim$, donde $x \sim y$ si, y sólo si existe $\lambda \neq 0$ tal que $y = \lambda x$. Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$ la proyección canónica en el cociente y para $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$ consideramos la topología cociente determinada por π.
   a) Demuestra que $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{RP}^n$.
   b) Demuestra que $U_i = \{[x] \mid x_i \neq 0\}$, para cada $1 \le i \le n+1$, es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$.
   c) Definimos la función $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ por $\phi_i([x]) = \frac{1}{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1})$, para cada $1 \le i \le n+1$. Demuestra que $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ es un atlas suave en $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$.

9. Considera la banda infinita $[0,1]\times\mathbb{R}$. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $[0,1]\times\mathbb{R}$ tal que identifica $(0,y)$ con $(1,-y)$. Sea $M = [0,1]\times\mathbb{R}/\sim$ (la banda de Möbius infinita) el espacio cociente y sea $\pi : [0,1]\times\mathbb{R} \to M$ la proyección canónica. Demuestra que M es una 2-variedad.

10. Sea N una variedad de dimensión N. Demuestra que si $M \subseteq N$ es una subvariedad de N de dimensión n, entonces M es un abierto de N.

11. Sean N_1 y N_2 variedades. Demuestra que si $M_1 \subseteq N_1$ y $M_2 \subseteq N_2$ son subvariedades, entonces $M_1 \times M_2 \subseteq N_1 \times N_2$ es una subvariedad de $N_1 \times N_2$.

12. Sean $f_1 : M \to N_1$ y $f_2 : M \to N_2$ funciones entre variedades y $f : M \to N_1 \times N_2$ dada por $f(p) = (f_1(p), f_2(p))$. Demuestra que f es suave si, y sólo si f_1 y f_2 lo son.

13. Sean $f : M_1 \to N_1$ y $g : M_2 \to N_2$ funciones entre variedades y $f \times g : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ dada por $(f\times g)(p,q) = (f(p), g(q))$. Demuestra que $f \times g$ es suave si, y sólo si f y g son suaves.

14. Sea M una variedad de dimensión m. Definimos la diagonal en $M \times M$ como $\Delta := \{(p,p) \in M \times M\}$. Demuestra que Δ con la topología relativa es difeomorfa a M.

15. Sean M una variedad suave de dimensión m con estructura suave D, N un espacio topológico y $f : M \to N$ un homeomorfismo. Demuestra que a N se le puede dotar de una única estructura suave D_f tal que f es un difeomorismo.

16. Demuestra que si $f : M \to N$ es un difeomorfismo local y f es inyectiva, entonces f es un difeomorfismo sobre un abierto de N.

17. Demuestra que si $f : M \to N$ es un difeomorfismo y $Z \subseteq M$ es una subvariedad de M, entonces $f(Z) \subseteq N$ es una subvariedad de N.

18. Demuestra que $\mathbb{S}^1$ es difeomorfa a $\mathbb{RP}^1$.

19. Demuestra que $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$.

20. Demuestra que $\mathbb{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right\}$ es una variedad difeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

21. Demuestra que $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right\}$ es una variedad difeomorfa a $\mathbb{S}^2$.

22. Generaliza la proyección estereográfica para definir un difeomorfismo de $\mathbb{S}^n \backslash \{e_{n+1}\}$ a $\mathbb{R}^n$.

23. Demuestra que $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ es una variedad suave de dimensión 2 con frontera.

24. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 0\}$.

    a) Calcula la frontera topológica de M.

    b) Demuestra que $M \backslash \{(0, 0)\}$ es una variedad suave de dimensión 2 con frontera y calcula ∂M.

25. Sea M una variedad suave de dimensión m con frontera. Demuestra que si M es compacta, entonces ∂M es compacta.

26. Da un ejemplo de una variedad suave M de dimensión m con frontera tal que ∂M sea compacta pero M no lo sea.

27. Sean N una variedad de dimensión n, $M \subseteq N$ una subvariedad de N de dimensión m y $\iota : M \hookrightarrow N$ la inclusión. Demuestra que ι es suave y que $d\iota(p) : T_pM \to T_pN$ es inyectiva para cada $p \in M$.

28. Sean M una variedad de dimensión m y $U \subseteq M$ un abierto. Demuestra que $T_pU = T_pM$ para cada $p \in U$.

29. Resuelve lo siguiente:

    a) Calcula $T_p\mathbb{S}^1$, donde $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

    b) Determina una base para $T_p\mathbb{S}^2$, donde $p = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

30. Sea $f : M \to N$ suave y $p \in \mathbb{M}$. Demuestra que $df(p) : T_p(M)_G \to T_{f(p)}(N)_G$ es lineal.

31. Sean M_1 y M_2 variedades y $(p, q) \in M_1 \times M_2$. Sean $\iota_p : M_2 \to M_1 \times M_2$ y $\iota_q : M_1 \to M_1 \times M_2$ tales que $\iota_p(y) = (p, y)$ y $\iota_q(x) = (x, q)$. Demuestra que ι_p y ι_q son suaves y determina $d(\iota_p)(p)$ y $d(\iota_q)(q)$.

32. Sean M_1 y M_2 variedades, y $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$, para $i = 1, 2$, las proyecciones. Demuestra que $(d\pi_1(p), d\pi_2(q)) : T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) \to T_pM_1 \times T_qM_2$, tal que $(d\pi_1(p), d\pi_2(q))(v) = (d\pi_1(p)(v), d\pi_2(q)(v))$ define un isomorfismo entre $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ y $T_pM_1 \times T_qM_2$.

33. Sean M y N variedades y $f : M \to N$ suave. Demuestra que $F : M \to M \times N$ dada por $F(p) = (p, F(p))$ es suave y determina $dF(p) : T_pM \to T_pM \times T_{f(p)}N$.

34. Demuestra que:

    a) $T\mathbb{S}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

    b) $T\mathbb{T}^2$ es difeomorfo a $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

35. Sea M una variedad de dimensión m. Demuestra que la proyección $\pi : TM \to M$ es suave.

36. Sea $f : M \to N$ suave. Demuestra que f induce una función suave $df : TM \to TN$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\pi"'] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

37. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Demuestra que:

$$TM \cong \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_xM \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$