0.2. Ejercicios de Haces

1. Sea $\xi^n = (E, \pi, M)$ un haz vectorial. Demuestra que $\pi : E \to M$ es abierta.

2. Sea $\xi^n = (E, \pi, M)$ un haz vectorial. Demuestra que $E^* = \bigsqcup_{p \in M}(E_p)^*$ es un haz vectorial, llamado **haz dual**.

3. Sean $\xi^n = (E, \pi, M)$ un haz vectorial y $F \subseteq E$ un k-subhaz de ξ. Demuestra que $E/F = \bigsqcup_{p \in M} E_p/F_p$ es un haz vectorial, llamado **haz cociente**.

4. Sean $\xi^{n_1} = (E_1, \pi_1, M_1)$ y $\xi^{n_2} = (E_2, \pi_2, M_2)$ haces vectoriales y $d : M \to M \times M$ tal que $d(p) = (p, p)$. Demuestra que $\xi = (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, M)$ es un haz vectorial y que $E_1 \oplus E_2 = d^*(E_1 \times E_2)$.

5. *El haz de Möbius.* Considera la banda infinita $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $[0, 1] \times \mathbb{R}$ que identifica cada punto $(0, y)$ con el punto $(1, -y)$. Sea $M = [0, 1] \times \mathbb{R}/\sim$, la banda de Möbius infinita, el espacio cociente y sea $p : [0, 1] \times \mathbb{R} \to M$ la proyección. Demuestra que

   a) M es una 2-variedad.
   b) M se puede considerar como el espacio total de un 1-haz vectorial sobre $\mathbb{S}^1$.
   c) $(M, \pi, \mathbb{S}^1)$ no es isomorfo a $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \pi_1, \mathbb{S}^1)$.

6. Demuestra que si M es una m-variedad suave contraible, entonces todo haz sobre M es equivalente al haz trivial.

7. Una variedad es **paralelizable** si su haz tangente es trivial. Demuestra que $\mathbb{S}^3$ es paralelizable.

8. Demuestra que un haz vectorial es trivial si, y sólo si tiene un atlas cuyas funciones de transición sean todas funciones a $\{I\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

9. Sean $\xi^n = (E, \pi, M)$ un haz vectorial, $M_0 \subseteq M$ una subvariedad y $i : M_0 \hookrightarrow M$ la inclusión. Demuestra que $i^*(E)$ y $E_{|_{M_0}}$ son canónicamente isomorfos.

10. Demuestra que si $\xi^n = (E, \pi, M)$ es un haz vectorial trivial y $f : N \to M$ es suave, entonces $f^*(\xi)$ es trivial.

11. Sean $\xi^n = (E, \pi, Z)$ un haz vectorial, $f : M \to N$ y $g : N \to Z$ suaves. Demuestra que $(g \circ f)^*(\xi) \cong f^*(g^*(\xi))$.

12. Sean $\xi^n = (E, \pi, M)$ un haz vectorial y $f : M \to \mathbb{R}$ suave. Sean $\sigma, \sigma' : M \to E$ secciones. Demuestra que $\sigma + \sigma', f\sigma : M \to E$ tales que $(\sigma + \sigma')(x) = \sigma(x) + \sigma'(x)$ y $(f\sigma)(x) = f(x)\sigma(x)$ son secciones. Argumenta que el conjunto de todas las secciones suaves de ξ, denotado por $\Gamma(\xi)$ o $\Gamma(E)$, es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo.

13. Demuestra que para cualquier subvariedad $M \subseteq \mathbb{R}^n$, la suma de Whitney $TM \oplus M^\perp$, del haz tangente y el haz normal, es trivial.

14. Demuestra que la subvariedad de $\mathbb{C}^{n+1}$ definida por

$$E = \left\{ (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 1 \right\},$$

es difeomorfa a $T\mathbb{S}^n$.

15. Un haz vectorial es **establemente trivial** si su suma de Whitney con un haz trivial adecuado es trivial. Demuestra que $T\mathbb{S}^n$ es establemente trivial.

16. Sean M una m-variedad suave y $\Delta_M = \{(p,p) \in M \times M \mid p \in M\}$ la diagonal en $M \times M$. Demuestra que Δ_M es una subvariedad de $M \times M$ para la cual el haz tangente y el haz normal son isomorfos, es decir, $T\Delta_M \cong \Delta_M^{\perp}$.

17. Demuestra que si $\xi^n = (E, \pi, M)$ es un haz trivial con una métrica Riemanniana, entonces existe un isomorfismo $E \cong M \times \mathbb{R}^n$, el cual es una isometría en cada fibra.