Topología Diferencial I
Transversalidad

Víctor Alfredo Milchorena González

16 de Abril de 2024

1. Demuestra que
   a) Si f y g son inmersiones, entonces su producto $f \times g$ también lo es.
   b) Si f y g son inmersiones, entonces su composición $f \circ g$ también lo es.
   c) Cuando $\dim M = \dim N$, las inmersiones $f : M \to N$ son lo mismo que los difeomorfismos locales.
2. Demuestra que
   a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ tal que $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ es un difeomorfismo local.
   b) $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tal que $G(t) = (g(t), g(t))$ es un difeomorfismo local. Además, si $L \subseteq \mathbb{R}^2$ es una recta, entonces $G : L \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una inmersión.
   c) Si $L \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene pendiente irracional, entonces G es inyectiva sobre L.
3. Determina en qué puntos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
   $$f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 y + y^2, x^2 - y^2),$$
   es una inmersión.
4. Determina en qué puntos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$f(x, y, z) = (xyz, x + y + z),$$
   es una sumersión.
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy + y^2, x^2 - y^2)$.
   a) Encuentra el mayor abierto de $\mathbb{R}^2$ en el cual f es una inmersión.
   b) Determina $f(\mathbb{R}^2)$.
   c) Determina $f^{-1}((a, b, c))$, para cada $(a, b, c) \in f(\mathbb{R}^2)$.
   d) Determina un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $f_{|_U}$ sea una inmersión inyectiva y que no esté contenido estrictamente en otro abirto que tenga la misma propiedad.
6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xy)$.
   a) Encuentra el mayor abierto de $\mathbb{R}^3$ en el cual f es una sumersión.
   b) Determina $f(\mathbb{R}^3)$.
   c) Determina $f^{-1}((a, b))$ para cada $(a, b) \in f(\mathbb{R}^3)$. Determina cuáles de éstos subconjuntos son subvariedades de $\mathbb{R}^3$.
7. Sea $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f([x, y, z]) = (xy, xz, yz)$.
   a) Demuestra que f es una función suave bien definida.
   b) ¿Es f inyectiva? ¿Es f una inmersión?
8. Demuestra que si M y N tienen la misma dimensión y f es un encaje, entonces f es una función abierta.

9. Demuestra que si $f : N \to M$ es un encaje y además N es compacta, M es conexa y N y M tienen la misma dimensión, entonces f es un difeomorfismo entre M y N.

10. Sea $g : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $g([x, y, z]) = (xy, xz, yz, x^4)$. ¿Es g un encaje o una inmersión?

11. Determina cuáles de los siguientes subconjuntos son subvariedades de clase $\mathcal{C}^r$ de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ para algún n, indicando r y k en los casos favorables.

    a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^5 + y^3 - z^3 + 2xyz = 1\}$.
    b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ -x + y - z^3 - 2z = -2\}$.
    c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$.
    d) $M = \{(\cos t, \sin t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
    e) $M = \left\{ \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}^+ \right\}$.

12. Demuestra que si $f : M \to N$ es un encaje, entonces $df : TM \to TN$ es un encaje.

13. Demuestra que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$ es un encaje. Demuestra que su imagen es una rama de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

14. Demuestra que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(t) = (t, t^2, t^3)$ encaja $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

15. Da un encaje $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$.

16. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (2xy, y)$. Demuestra que f es una inmersión pero no una sumersión.

17. Sea $f : M \to N$ una sumersión. Demuestra que f es una función abierta.

18. Demuestra las siguientes afirmaciones

    a) Si M es compacta y N es conexa, entonces toda sumersión $f : M \to N$ es suprayectiva.
    b) No existen sumersiones de variedades compactas en espacios euclideanos.

19. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z, u) = (x^2 + y, x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + y)$. Demuestra que $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ es un valor regular de f y que $f^{-1}((0, 1))$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es $f^{-1}(a)$ una subvariedad de $\mathbb{R}^2$?

21. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x - 1)(x - a)\}$. ¿Para qué valores de a es M_a una subvariedad de $\mathbb{R}^2$?

22. Demuestra que $T_I O(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$.

23. Demuestra que

    a) $SL(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ es una $(n^2 - 1)$-variedad.
    b) $T_I SL(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

24. Demuestra que $\mathcal{M}_{2\times 2}(1, \mathbb{R})$ es una 3-subvariedad de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

25. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

    a) Dados por $a, b \in \mathbb{R}^+$, muestra que $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ son variedades difeomorfas.
    b) Calcula $T_x f^{-1}(a)$ en $x \in f^{-1}(a)$.

26. Sea $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a,\ a > 0\}$. Calcula $T_x P$, donde $x = (\sqrt{a}, 0, 0)$.

27. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demuestra que $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = b\}$ es una $(n - 1)$-subvariedad de $\mathbb{R}^n$.

28. Considera al subconjunto de $^{n+1}$

$$M = \left\{ (z_0, \ldots, z_n) \in^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{n} z_i \overline{z_i} = 2 \right\}.$$

Demuestra que M es una $(2n-1)$-variedad.

29. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ y $Z = \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Demuestra que $f \pitchfork Z$ y calcula $T_p(f^{-1}(Z))$, donde $p = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

30. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x^2 + y^2, z^2 + 1)$ y $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Demuestra que $f \pitchfork Z$ y calcula $T_p(f^{-1}(Z))$, donde $p = (1,1,1)$.

31. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to W$ funciones suaves entre variedades y $Z \subseteq W$ subvariedad. Supón que $g \pitchfork Z$. Demuestra que $f \pitchfork g^{-1}(Z)$ si, y sólo si $(g \circ f) \pitchfork Z$.

Definición. Sean M y N subvariedades de W. Sea $i : N \hookrightarrow W$ la inclusión, entonces $i \pitchfork M$ si, y sólo si $T_p(N) + T_p(M) = T_p(W)$ para todo $p \in N \cap M$. En este caso, se dice que M y N son transversales y se denota como $N \pitchfork M$.

32. Sean M y N subvariedades transversales de W. Demuestra que si $p \in N \cap M$, entonces $T_p(N \cap M) = T_p(N) \cap T_p(M)$.

33. Demuestra lo siguiente

    a) Sean $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Entonces $L \pitchfork \mathbb{V}$ si, y sólo si $T_p(\mathbb{R}^m) + \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$.
    b) Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{V} \pitchfork \mathbb{W}$ simplemente significa que $\mathbb{V} + \mathbb{W} = \mathbb{R}^n$.

34. ¿Cuáles de los siguientes subespacios vectoriales tienen intersección transversal?

    a) El plano XY y el eje Z en $\mathbb{R}^3$.
    b) El plano XY y el plano generado por $\{(3,2,0), (0,4,-1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
    c) El plano generado por $\{(1,0,0), (2,1,0)\}$ y el eje Y en $\mathbb{R}^3$.
    d) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}^l$ en $\mathbb{R}^n$ (esto depende de k, l y n).
    e) $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ y $\mathbb{R}^l \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^n$ (esto depende de k, l y n).
    f) $\mathbb{V} \times \{0\}$ y la diagonal en $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$.
    g) Las matrices simétricas y antisimétricas en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

35. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\Delta \subseteq \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ su diagonal. Sean $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lineal y $W = \{(v, L(v)) \mid v \in \mathbb{V}\}$ su gráfica. Demuestra que $\mathbb{W} \pitchfork \Delta$ si, y sólo si 1 no es valor propio de L.

36. ¿Para qué valores de a ocurre que el hiperboloide definido por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a$ tienen intersección transversal? ¿Cómo se ve la intersección para diversos valores de a?

37. Responde lo siguiente.

    a) Sea $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2$. Demuestra que 1 es valor regular de f. Identifica la variedad $M = f^{-1}(1)$.
    b) Demuestra que $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ es variedad y que $M \pitchfork N$. Identifica $M \cap N$.
    c) Demuestra que M no es transversal a $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. ¿Es $M \cap N$ una variedad?
    d) Demuestra que M no es transversal a $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$. ¿Es $M \cap N$ una variedad?

38. Sean M, N y Z variedades suaves y sean $f : M \to N$ y $g : Z \to N$ suaves, tales que para todo $p \in M$ y $q \in Z$, con $f(p) = g(q) = r$, se cumple que

$$df(p)(T_p M) + dg(q)(T_q Z) = T_r N.$$

Demuestra que $\{(p,q) \in M \times Z \mid f(p) = g(q)\}$ es una variedad suave.

Definición. Una variedad N es **contraíble** si su aplicación identidad es homotópica a una constante.

39. Demuestra que N es contraíble si, y sólo si todas las aplicaciones de una variedad arbitraria M en N son homotópicas.

Definición. Una variedad M es **simplemente conexa** si es conexa y cada aplicación de $\mathbb{S}^1$ es homotópica a una aplicación constante.

40. Demuestra que todos los espacios contraíbles son simplemente conexos.

41. Sea M una variedad compacta. Demuestra que los difeomorfismos en $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ son una clase estable.

42. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto de medida cero. Demuestra que $A \times \mathbb{R}^n$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^{m+n}$.

43. Supón que $m < n$ y sea M una subvariedad de dimensión m de una variedad N de dimensión n. Demuestra que M tiene medida cero en N.

44. Supón que $m < n$ y sea $f : M \to N$ suave. Demuestra que $f(M) \subseteq N$ tiene medida cero.

45. Demuestra que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa si $n > 1$.
    Sugerencia. Si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$ y $n > 1$, el teorema de Sard proporciona un punto $p \notin f(\mathbb{S}^1)$. Ahora utiliza la proyección estereográfica.