

1. Cuestionario diagnóstico

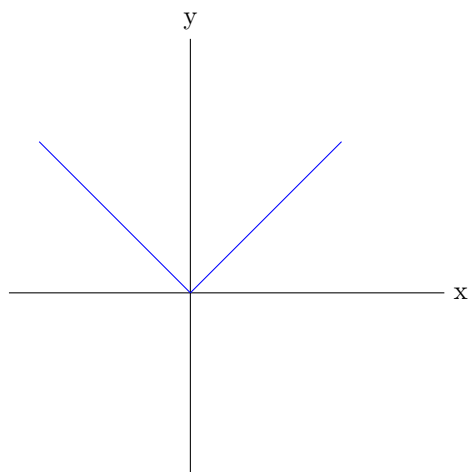
Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes incisos, di si existe una función con las propiedades requeridas. Si es posible, intenta dar un ejemplo explícito de dicha función.

- Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que sea biyectiva, continua y con inversa continua (es decir, un homeomorfismo), diferenciable y que su inversa no sea diferenciable
- Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y con derivada no nula en todo punto de su dominio, tal que su imagen sea compacta.
- Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable y con derivada no nula en todo punto de su dominio, tal que su imagen sea compacta. (Igual que en el caso anterior, pero el codominio es \mathbb{R}^2)
- Igual que el inciso anterior, pero que la función sea inyectiva

Ejercicio 2

Sea $X := \{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$ la gráfica de la función valor absoluto.



- Puede existir una función diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea el conjunto X .
- Igual que el inciso anterior, pero además que la derivada de la función no se anule en ningún punto.

Ejercicio 3

Para cada uno de los siguientes subconjuntos X de \mathbb{R}^2 di si puede existir una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la preimagen del cero de dicha función sea el conjunto dado. Es decir $f^{-1}(0) = X$. ¿Puede ser que la función tenga derivada no nula en todo punto del dominio?

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

Ejercicio 4

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. En cada una de las siguientes afirmaciones escribe **V** si la afirmación es verdadera, o **F** si es falsa.

- ___ Si T es inyectiva, entonces es suprayectiva.
- ___ Si T es suprayectiva, entonces es inyectiva.
- ___ Si T es biyectiva, entonces su inversa es lineal.
- ___ Existe una base β para V en la que la matriz $[T]_\beta^\beta$ es diagonal.
- ___ Existen bases β y γ para V en las que la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es diagonal.
- ___ Existen bases β y γ para V en las que la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es diagonal y únicamente tiene ceros o unos en la diagonal.
- ___ El espacio vectorial V es isomorfo a algún \mathbb{R}^n .
- ___ Existen transformaciones lineales biyectivas $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \phi \uparrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

y la transformación η está dada por:

$$\eta(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

donde r es algún número natural entre cero y n .

Ejercicio 5

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable. Sea $v = \dot{\gamma}(0)$ el vector velocidad de γ en el cero y sea $M = J_{\gamma(0)}f$ la matriz jacobiana de f en el punto $\gamma(0)$. En cada uno de los siguientes casos explica qué se puede deducir sobre $M \cdot v$:

- Si $f \circ \gamma$ es constante
- Si $f \circ \gamma(0) < f \circ \gamma(1)$
- Si $f \circ \gamma$ es creciente
- Si $f \circ \gamma$ es estrictamente creciente

Ejercicio 6

Para cada inciso, exhibe un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla con las propiedades requeridas o argumenta por qué no puede existir:

- que sea C^0 pero no C^1
- que sea C^1 pero no C^2

- (c) como en el inciso anterior, pero además que sea idénticamente cero para todo $x \leq 0$ y que sea positiva para todo $x > 0$
- (d) que sea idénticamente cero para todo $x \leq 0$ y que sea positiva para todo $x > 0$, pero además que tenga derivadas continuas de todos los órdenes
- (e) para cada entero positivo k , una función que sea C^k pero no C^{k+1}