Topología diferencial I

Tarea 10

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**11 de octubre de 2024**
Fecha de entrega	**17 de octubre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**29**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $t : T_1^1(V) \to \mathbb{R}$ tal que $t(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$.

Si $T \in L(V, V)$ es una transformación lineal que en alguna base β de V está dada por una matríz M, y ω_T es el $\binom{1}{1}$-tensor que naturalmente corresponde T, calcula $t(\omega_T)$ en términos de M.

Ejercicio 2 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es no-degenerada si para todo vector no nulo $v \in V$ existe algún otro vector $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$.

Demuestra que si ω es una forma bilineal alternante y no-degenerada, entonces la dimensión de V es par y además existe una base para V $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_m, w_m$ tal que se cumple:

$$\omega(v_i, w_i) = 1$$

$$\omega(w_i, v_i) = -1$$

y

$$\omega(w_i, v_j) = 0$$

en los demás casos.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que el rango de f es localmente no decreciente.

Ejercicio 4 — 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Sea X una k-variedad y $p \in X$.

Demuestra que la función

$$\mathfrak{ev} : \mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2 \times \mathrm{Der}_p(X) \to \mathbb{R}$$

dada por $\mathfrak{ev}([\alpha], \delta) := \delta(\alpha)$ es un apareamiento bilineal bien definido y no degenerado entre los espacios vectoriales $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)$, por lo que induce un isomorfismo entre $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)^*$.

Ejercicio 6 — 2 puntos

Sean X y Y dos variedades. Demuestra que la relación «f es diferenciablemente homotópica a g» es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathrm{C}^\infty(X, Y)$.

Ejercicio 7 — 3 puntos

Sean $X = \mathbb{S}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$ y $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ donde $0 < a < b < c$.

Sea $f : X \to Y$ la función dada por $f(x, y, z) = (bx, by, bz)$.

Demuestra que f es una inmersión que no es transversal a Z y exhibe una homotopía h de f tal que para todo $0 < t \leq 1$ la función h_t es una inmersión transversal a Z.

Ejercicio 8 — 3 puntos

Sea $f : X \to X$ una transformación diferenciable de una variedad en si misma. Si $p \in X$ es un punto fijo de f, decimos que es de Leftscetz si 1 no es valor propio de $D_p f : T_p X \to T_p X$. Si todos los puntos fijos de f son de Lefschetz, entonces decimos que f es de Lefschetz.

Demuestra que si f es una función de Lefschetz y X es compacta, entonces f tiene una cantidad finita de puntos fijos.

Ejercicio 9 — 4 puntos

Sean V, W dos espacios vectoriales, y sea $Z \leq W$ un subespacio.

Demuestra que T es transversal a W si y solo si para cualquier par de funciones diferenciables $h : [0, 1] \to \mathrm{GL}(W)$ y $w : [0, 1] \to W$ tales que $h(0) = \mathbb{1}_W$ y $w(0) = 0$, si definimos la función

$$\begin{aligned} T_t : V &\to W \\ v &\mapsto h(t)(T(v)) + w(t) \end{aligned}$$

entonces el subespacio afín $T_t^{-1}(Z)$ tiene la misma dimensión que $T^{-1}(Z)$ para t suficientemente cercano a cero.

Ejercicio 10 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenads, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 11 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un subconjunto de k funciones coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ tales que la función

$$f(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

restringida a una vecindad abierta de p en X es una carta coordenada.

Ejercicio 12 2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\mathrm{SO}(n)$ es una variedad diferenciable.

Fin de la tarea