Topología diferencial I

Tarea 11

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**18 de octubre de 2024**
Fecha de entrega	**24 de octubre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**24**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es no-degenerada si para todo vector no nulo $v \in V$ existe algún otro vector $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$.

Demuestra que si ω es una forma bilineal alternante y no-degenerada, entonces la dimensión de V es par y además existe una base para V $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_m, w_m$ tal que se cumple:

$$\omega(v_i, w_i) = 1$$

$$\omega(w_i, v_i) = -1$$

y

$$\omega(w_i, v_j) = 0$$

en los demás casos.

Ejercicio 2 — 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que el rango de f es localmente no decreciente.

Ejercicio 3 — 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 4 — 2 puntos

Sean X y Y dos variedades. Demuestra que la relación «f es diferenciablemente homotópica a g» es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathrm{C}^\infty(X, Y)$.

Ejercicio 5 — 3 puntos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario.

Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de *cubos abiertos* cuya unión cubre a A y con volumen total menor que ϵ.
2. Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{\overline{C}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de *cubos cerrados* cuya unión cubre a A y con volumen total menor que ϵ.
3. Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de *solidos abiertos*(es decir, con lados posiblemente distintos) cuya unión cubre a A y con volumen total menor que ϵ.
4. Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{\overline{S}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de *solidos cerrados* cuya unión cubre a A y con volumen total menor que ϵ.
5. Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de *bolas abiertas* cuya unión cubre a A y con volumen total menor que ϵ.
6. Para cada $\epsilon > 0$ existe una familia $\{\overline{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de *bolas cerradas* cuya unión cubre a A y con volumen total menor que ϵ.

En cada caso cuida utilizar la fómula de volumen correspondiente.

Ejercicio 6 — 2 puntos

Sin usar el teorema de Sard, demuestra que si X es una n-variedad y Y es una m-variedad con $m < n$ y $f : X \to Y$ es una función diferenciable, entonces $f(X)$ es de medida cero en Y

Ejercicio 7 — 3 puntos

Sea $f : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ una transformación diferenciable con X una n-variedad compacta y tal que $0 \notin f(X)$.

Demuestra que existe una recta que pasa por el origen y que intersecta a $f(X)$ en una cantidad finita de puntos.

Ejercicio 8 — 2 puntos

Sea $f : X \to \mathbb{R}^p$ una transformación diferenciable y sea $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ una subvariedad.

Demuestra que existe un vector $v \in \mathbb{R}^p$ tal que la función f_v dada por $f_v(p) = f(p) + v$ es transversal a Y.

Ejercicio 9 — 3 puntos

Sean V, W dos espacios vectoriales, y sea $Z \leq W$ un subespacio.

Demuestra que una transformación lineal $T : V \to W$ es transversal a Z si y solo si para cualquier par de funciones diferenciables $h : [0,1] \to \mathrm{GL}(W)$ y $w : [0,1] \to W$ tales que $h(0) = 1_W$ y $w(0) = 0$, si definimos la función

$$\begin{aligned} T_t : V &\to W \\ v &\mapsto h(t)(T(v)) + w(t) \end{aligned}$$

entonces el subespacio afín $T_t^{-1}(Z)$ tiene la misma dimensión que $T^{-1}(Z)$ para t suficientemente cercano a cero.

Ejercicio 10 **2 puntos**

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenadas, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Fin de la tarea