Topología diferencial I

Tarea 12

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**24 de octubre de 2024**
Fecha de entrega	**31 de octubre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**17**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es no-degenerada si para todo vector no nulo $v \in V$ existe algún otro vector $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$.

Demuestra que si ω es una forma bilineal alternante y no-degenerada, entonces la dimensión de V es par y además existe una base para V $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_m, w_m$ tal que se cumple:

$$\omega(v_i, w_i) = 1$$

$$\omega(w_i, v_i) = -1$$

y

$$\omega(w_i, v_j) = 0$$

en los demás casos.

Ejercicio 2 — 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^1$ y $p \in \mathcal{U}$ un punto crítico de f.

Demuestra que existe una función diferenciable g definida en una vecindad de p que cumple:

$$f(x) = f(p) + (x - p)^2 g(x)$$

para todo punto x en dicha vecindad. Demuestra que además se cumple $2g(p) = f''(p)$.

Ejercicio 4 — 2 puntos

Sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathcal{U}$ un punto crítico de f.

Demuestra que si la matriz hessiana de f en p es no singular entonces existe una vecindad de p tal que p es el único punto crítico de f en dicha vecindad.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathcal{U}$ un punto crítico de f.

Sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo.

Demuestra que la matriz hessiana de f en p es no singular si y solo si la matriz hessiana de $f \circ \varphi^{-1}$ es no singular en $\varphi(p)$.

Ejercicio 6 — 2 puntos

Exhibe una función diferenciable $f : X \to \mathbb{R}^1$ donde X es una variedad diferenciable y que tenga un conjunto denso de valores críticos.

Ejercicio 7 — 2 puntos

Demuestra que si

$$\{I_j\}_{j \in J}$$

es una cubierta abierta de $[0, 1]$ tal que cada I_j es un subintervalo, entonces existe una subcubierta finita

$$\{I_k\}_{k=1}^n$$

tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \leq 2$$

donde $|I|$ denota la longitud del intervalo I.

Ejercicio 8 — 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenadas, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Fin de la tarea