Topología diferencial I

Tarea 13

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**4 de noviembre de 2024**
Fecha de entrega	**11 de noviembre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**30**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es no-degenerada si para todo vector no nulo $v \in V$ existe algún otro vector $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$.

Demuestra que si ω es una forma bilineal alternante y no-degenerada, entonces la dimensión de V es par y además existe una base para V $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_m, w_m$ tal que se cumple:

$$\omega(v_i, w_i) = 1$$

$$\omega(w_i, v_i) = -1$$

y

$$\omega(w_i, v_j) = 0$$

en los demás casos.

Ejercicio 2 — 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 3 — 4 puntos

Demuestra que existe una 3-variedad compacta y con frontera X tal que ∂X es difeomorfa a la unión ajena de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 4 — 3 puntos

Dada una n-variedad con frontera $X \subseteq \mathbb{R}^N$ y $p \in \partial X$ demuestra que existe un único vector $n_p \in T_pX$ que cumple las siguientes propiedades

- n_p es normal a $T_p\partial X$,
- n_p tiene norma 1 con respecto a la norma euclideana de $\mathbb{R}^N$,
- para cualquier carta $\varphi : \mathcal{U} \to V \subseteq \mathbb{H}^n$definida en una vecindad de p se cumple que $D_p\varphi(n_p) \in \mathbb{H}^n$.

Ejercicio 5 — 4 puntos

Dada una variedad con frontera X demuestra que existe una función diferenciable $f : X \to \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular y además $f^{-1}(0) = \partial X$. (Sugerencia: puedes usar sin demostrar el teorema de existencia de particiones de la unidad de la sección 1.8 de Guillemin-Pollack)

Ejercicio 6 — 2 puntos

Demuestra que $X = [0, 1] \times [0, 1]$ no es una variedad con frontera.

Ejercicio 7 — 3 puntos

Sea X una n-variedad con frontera (posiblemente vacía). Demuestra que si $p \in \operatorname{int} X$ es arbitrario, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que el conjunto $Y := X \setminus B_\epsilon(p)$ es una variedad con frontera y además se cumple que ∂Y es difeomorfo a la unión ajena de ∂X con $\mathbb{S}^{n-1}$.

Ejercicio 8 — 3 puntos

Demuestra que existe una variedad con frontera no vacía X tal que para cualquier punto $p \in X$ se cumple que $X \setminus \{p\}$ es difeomorfo a X.

Ejercicio 9 — 2 puntos

Exhibe un ejemplo de una función diferenciable $f : X \to Y$ donde X es una variedad con frontera, Y es una variedad sin frontera, y $Z \subseteq Y$ una subvaridad sin frontera tales que la restricción de f a $\operatorname{int} X$ es transversal a Z y además $f^{-1}(Z)$ no es una variedad con frontera.

Ejercicio 10 — 2 puntos

Demuestra que si X es una n-variedad sin frontera, entonces existe otra variedad con frontera Y de dimensión $n + 1$ tal que ∂Y es difeomorfa a X

Ejercicio 11 — 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenadas, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

——— Fin de la tarea ———