# Topología diferencial I

## Tarea 14

Épsilon vecindades

| | |
|---|---|
| Fecha de aplicación | **12 de noviembre de 2024** |
| Fecha de entrega | **18 de noviembre de 2024** |
| Puntos requeridos | **5** |
| Puntos máximos posibles | **9** |

### Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^N$ una n-variedad diferenciable.

Considera el conjunto $NX$ definido como sigue:

$$NX \coloneqq \{(p, v) \in X \times \mathbb{R}^N | v \perp T_p X\}.$$

Demuestra que $NX$ es una subvariedad de $\mathbb{X} \times \mathbb{R}^N$. Calcula su dimensión.

Demuestra que el conjunto $\tilde{X} \coloneqq \{(x, 0) | x \in X\}$ es una subvariedad de $NX$ difeomorfa a $X$.

Demuestra que la función $\pi : NX \to X$ dada por $\pi(x, v) = v$ es una sumersión que es la identidad en $\tilde{X}$.

### Ejercicio 2 — 3 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable y $Z \subseteq X$ una subvariedad de $X$. Demuestra que si $D_p f$ es un isomorfismo para todo $p \in Z$ y $f|_Z$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces existe una vecindad abierta $\mathcal{W}$ de $Z$ tal que $f|_{\mathcal{W}}$ también es un difeomorfismo sobre su imagen.

### Ejercicio 3 — 2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^N$ una subvariedad. Considera la función $p : NX \to \mathbb{R}^N$ dada por $p(x, v) = p + v$. Demuestra que dicha función es diferenciable y que existen vecindades $\mathcal{U}$ de $X$ y $\mathcal{W}$ de $\tilde{X}$ tales que $p$ es un difeomorfismo entre dichas vecindades.

### Ejercicio 4 — 2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^N$ una subvariedad. Demuestra que si $\mathcal{U}$ es una vecindad abierta de $X$ entonces existe una función diferenciable $\varepsilon : X \to \mathbb{R}_{>0}$ tal que el conjunto $\{q \in \mathbb{R}^N | d(p, q) < \varepsilon(p) \text{ para algún } p \in X\}$ está contenido en dicha vecindad. Demuestra que si $X$ es compacta, entonces se además se puede garantizar la propiedad anterior con una función $\varepsilon$ constante.

—— Fin de la tarea ——