Topología diferencial I

Tarea 15

Fecha de aplicación	**20 de noviembre de 2024**
Fecha de entrega	**27 de noviembre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**10**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea X una variedad compacta de $\mathbb{R}^N$ y $q \in \mathbb{R}^N$. Demuestra que existe un punto (no necesariamente único) $p \in X$ que es el más cercano a q de todos los puntos en X. Demustra que el vector $q - p$ pertenece a $N_p(X)$, espacio normal a X en p.

Ejercicio 2 — 3 puntos

Sean X y Z dos subvariedades de una variedad Y, tales que X es compacta, $X \cap Z \neq \emptyset$ y $\dim X + \dim Z < \dim Y$. Demuestra que X se puede separar de Y mediante una deformación arbitrariamente pequeña.

Es decir, demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to Y$ que cumple las siguientes propiedades:

- La función h_0 es la inclusión de X en Y,
- para todo $t \in [0,1]$ la función h_t es un encaje de X en Y,
- para todo $x \in X$ se cumple $|h_1(x) - x| < \varepsilon$,
- la imagen de h_1 no interseca a Z.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Dada una subvariedad X de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$, decimos que un punto en $\mathbb{R}^n$ es un punto focal de X si es un valor crítico de la transformación $h : N(X) \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(x,v) = x + v$.

Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. Localiza los puntos focales de X.

Definición. *Dada una subvariedad Z de una variedad $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ de codimensión k, definimos el **haz normal** de Z en Y como el conjunto*

$$N(Z;Y) \coloneqq \left\{ (z,v) \in Z \times T(Y) \;\middle|\; v \in T_zY \text{ y } v \perp T_zZ \right\}.$$

*Decimos que $N(Z;Y)$ es **trivial** si existe un difeomorfismo $\Phi : N(Z;Y) \to Z \times \mathbb{R}^k$ tal que para cada punto $z \in Z$ se restringe a un isomorfismo lineal entre $N(Z;Y) \cap T_zY$ y $\{z\} \times \mathbb{R}^k$.*

Ejercicio 4 — 3 puntos

Demuestra que $N(Z;Y)$ es trivial si y solo si existen k funciones diferenciables $g_1, \ldots, g_k$ definidas en un abierto $\mathcal{U}$ de Y tales que

$$Z = \{y \in \mathcal{U} \mid g_1(y) = 0, \ldots, g_k(y) = 0\}$$

y además, para todo punto en $\mathcal{U}$ las diferenciales de las funciones son linealmente independientes.

—— Fin de la tarea ——