Topología diferencial I

Tarea 2

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**12 de agosto de 2024**
Fecha de entrega	**19 de agosto de 2024**
Puntos requeridos	**5**

Ejercicio 1 — 3 puntos

Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y considera dicho conjunto con la topología de subespacio. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a X.

Ejercicio 2 — 3 puntos

Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$ y considera dicho conjunto con la topología de subespacio. Demuestra que $\mathbb{R}^1$ no es homeomorfo a X.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Demuestra que $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \{p\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ con la topología de subespacio, donde $p \in \mathbb{R}^m$ es un punto arbitrario.

Ejercicio 4 — 3 puntos

Demuestra que si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable con dominio abierto, entonces su gráfica es un conjunto difeomorfo a $\mathcal{U}$.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Dada una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y un punto $p \in \mathcal{U}$, demuestra que si existe una función $g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ que sea diferenciable, localmente una inversa de f y además $f(p) \in \mathcal{V}$, entonces la diferencial de f en p es una transformación lineal no singular.

Ejercicio 6 — 2 puntos

Dada una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{U}$ es una curva diferenciable definida en una vecindad del 0 tal que $f \circ \gamma$ es constante, demuestra que la diferencial de f en p es singular.

Ejercicio 7 — 2 puntos

Dado $W \leq V$ un subespacio vectorial de otro espacio vectorial, ambos de dimensión finita, demuestra que existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^k \to V$ que es inyectiva y tal que W es su imagen.

Ejercicio 8 — 2 puntos

Demuestra que la topología de subespacio es la más gruesa que hace que la función de inclusión sea continua.

Ejercicio 9 — 3 puntos

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entre espacios de dimensión finita y de la misma dimensión, demuestra que el determinante de T no depende de las bases que se usen para calcularlo.

Ejercicio 10 — 2 puntos

Demuestra que la topología natural en $\mathbb{R}^{n+m}$ coincide con la topología producto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ bajo la identificación natural entre $\mathbb{R}^{n+m}$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Ejercicio 11 — 2 puntos

Dado un espacio topológico X y un subconjunto $Y \subseteq X$, demuestra que la topología de subespacio en Y es la única topología que cumple que una función $f : Z \to Y$ de un espacio topológico Z a Y es continua si y solo si $i \circ f$ es continua, donde $i : Y \to X$ es la función inclusión.

Ejercicio 12 — 3 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable y suprayectiva con diferencial no singular en todo punto, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto, entonces f es un difeomorfismo.

Ejercicio 13 — 2 puntos

Explica por qué la regla de la cadena para funciones reales de una variable se puede obtener como un caso particular de la regla de la cadena para funciones diferenciables vectoriales de varias variables.

Ejercicio 14 — 2 puntos

Dado $W \leq V$ un subespacio vectorial de otro espacio vectorial, ambos de dimensión finita, demuestra que existe una transformación lineal $T : V \to \mathbb{R}^{n-k}$ que es suprayectiva y tal que W es su núcleo.

Ejercicio 15 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Demuestra que cualquier norma sobre V induce la mísma topología.

Ejercicio 16 — 3 puntos

Dada una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y tal que su diferencial es no singular en todo punto, demuestra que su imagen es un conjunto abierto $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 17 3 puntos

Exhibe una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumpla lo siguiente:

- f es continua,
- para cualquier dirección $v \in \mathbb{R}^2$ la derivada direccional de f en cero y con dirección v existe,
- f no es diferenciable en cero.

Ejercicio 18 2 puntos

Sea

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2 \text{ y además } z \geq 0\}$$

y considera dicho conjunto con la topología de subespacio. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a X.

Ejercicio 19 2 puntos

Dado un espacio topológico X demuestra que las siguentes afirmaciones son equivalentes:

- Para todo punto $x \in X$ existe un abierto $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{U}$ y además U es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- Para todo punto $x \in X$ existe un abierto $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{U}$ y además U es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 20 3 puntos

Sea $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2\}$ y considera dicho conjunto con la topología de subespacio. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a X.

Ejercicio 21 4 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable e inyectiva con derivada no nula en todo punto, entonces su imagen es un conjunto no compacto.

Ejercicio 22 2 puntos

Dado $W \leq V$ un subespacio vectorial de otro espacio vectorial, ambos de dimensión finita, demuestra que existe un isomorfismo lineal $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(W) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Ejercicio 23 3 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable con derivada no nula en todo punto, entonces su imagen es un conjunto no compacto.

Ejercicio 24 3 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo: no existen difeomorfismos entre $\mathbb{R}^1$ y el conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = |x|\}.$$

Ejercicio 25 3 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función con diferencial no singular en todo punto, entonces no es constante en el conjunto $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 26 2 puntos

Demuestra que $\mathbb{R}^1$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 27 4 puntos

Sea

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2 \text{ y además } z \geq 0\}.$$

Demuestra o exhibe un contraejemplo: no existen difeomorfismos entre $\mathbb{R}^2$ y X.

Ejercicio 28 2 puntos

Demuestra que si $m \neq n$, entonces $\mathbb{R}^n$ no es difeomorfo a $\mathbb{R}^m$.

Ejercicio 29 2 puntos

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $Y \subseteq X$ demuestra que la topología inducida por la métrica restringida a Y coincide con la topología de subespacio de Y.

Ejercicio 30 4 puntos

Demuestra que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ si $m \neq n$.

Ejercicio 31 2 puntos

Demuestra que en un espacio topológico Hausdorff los límites de sucesiones convergentes son únicos.

Ejercicio 32 2 puntos

Dado un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $Y \subseteq X$ demuestra que la métrica restringida $d_{Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ es realmente una métrica sobre Y.

——— Fin de la tarea. ———