Topología diferencial I

Tarea 3

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**19 de agosto de 2024**
Fecha de entrega	**26 de agosto de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**88**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable como función de un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ si y solo si la correspondiente función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido usual.

Ejercicio 2 — 3 puntos

Demuestra que si (X, τ) es un espacio topológico y $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces existe una única topologia en Y tal que f es continua y además para cualquier función $g : Y \to Z$, g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua. Demuestra que dicha topología es la topología más fina posible tal que f es continua.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq R^m$ son dos subconjuntos, demuestra que las funciones de proyección $p_X : X \times Y \to X$ y $p_Y : X \times Y \to Y$ son diferenciables.

Ejercicio 4 — 3 puntos

Demuestra que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciales y $(x, y) \in X \times Y$ es arbitrario, entonces se cumple:

$$T_{(x,y)}X \times Y = T_xX \times T_yY$$

Ejercicio 5 — 2 puntos

Demuestra que si X es una n-variedad diferencial, entonces X es localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 6 — 3 puntos

Considera la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^2$ dada por

$$v \sim w \text{ si y solo si } v - w \in \mathbb{Z}^2.$$

Demuestra que $\mathbb{R}^2/\sim$, que también denotaremos $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, con la topología cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 7 — 3 puntos

Si $f : X \to Y$ es una función diferenciable, demuestra que su gráfica es un subconjunto de $X \times Y$ que es difeomorfo a X. En particular si X es una variedad, también lo es la gráfica de f.

Ejercicio 8 — 2 puntos

Demuestra que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$ son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}^k$ es una función diferenciable, entonces su restricción a Y también es diferenciable.

Ejercicio 9 — 3 puntos

Demuestra que la esfera $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable que no es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 10 — 3 puntos

Demuestra que si X es un subespacio afin de $\mathbb{R}^n$ entonces es difeomorfo a algún $\mathbb{R}^k$. Más aún, se puede obtener un difeomorfismo como la composición de una transformación lineal inyectiva seguida de una traslación.

Ejercicio 11 — 2 puntos

Dada una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{U}$ una curva diferenciable cuya derivada no se anula en ningún punto, definida en una vecindad del 0 tal que $f \circ \gamma$ es constante, demuestra que la diferencial de f en $p = \gamma(0)$ es singular.

Ejercicio 12 — 4 puntos

Considera $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, que es una 2-variedad diferenciable. Describe explícitamente (mediante una base) al espacio tangente

$$T_x\mathbb{S}^2$$

para cada $x \in \mathbb{S}^2$.

Ejercicio 13 — 3 puntos

(la topología cociente) Demuestra que si (X, τ) es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X, entonces existe una única topologia en $X/\sim$ que cumple:

- la función proyección $p : X \to X/\sim$ es continua
- para toda función continua $g : X \to Z$ que cumpla que $g(x) = g(y)$ para cualesquiera $x \sim y$, existe una única función continua $\tilde{g} : X/\sim \to Z$ tal que $g = \tilde{g} \circ p$.

Ejercicio 14 — 3 puntos

Considera $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, que es una 1-variedad diferenciable.

Describe explícitamente (mediante una base) al espacio tangente

$$T_x\mathbb{S}^1$$

para cada $x \in \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 15 3 puntos

Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son dos subconjuntos y $f : X \to Y$ una función, demuestra que f es diferenciable si y solo si $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es diferenciable para toda función diferenciable $g : Y \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 16 3 puntos

Demuestra que cualquier bola abierta de dimensión n es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 17 3 puntos

Considera la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$x \sim y \text{ si y solo si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

Demuestra que $\mathbb{R}/\sim$, que también denotaremos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con la topología cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 18 2 puntos

Demuestra que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciales, entonces $X \times Y$ también lo es.

Ejercicio 19 3 puntos

Dada una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y tal que su diferencial es no singular en todo punto, demuestra que su imagen es un conjunto abierto $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 20 3 puntos

Si $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial y $p \in \mathcal{V}$ es un punto arbitrario, demuestra que:

$$T_xV = V.$$

Ejercicio 21 2 puntos

Si $f : X \to Y$ y $g : W \to Z$ son dos funciones diferenciables, demuestra que $f \times g : X \times W \to Y \times Z$ también es diferenciable.

Ejercicio 22 3 puntos

Si $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto de una n-variedad diferenciable y $p \in \mathcal{U}$ es un punto arbitrario, demuestra que:

$$T_xU = T_xX.$$

Ejercicio 23 3 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función con diferencial no singular en todo punto, entonces no es constante en el conjunto $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 24 3 puntos

Si $Y \subseteq X$ es un subconjunto de una n-variedad X, demuestra que Y es una n-variedad si y solo si es un abierto de X.

Ejercicio 25 4 puntos

Sea

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2 \text{ y además } z \geq 0\}.$$

Demuestra o exhibe un contraejemplo: no existen difeomorfismos entre $\mathbb{R}^2$ y X.

Ejercicio 26 4 puntos

Considera la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dada por $v \sim w$ si y solo si v y w generan el mismo subespacio. Demuestra que $\mathbb{R}^3/\sim$, que también denotaremos $\mathbb{RP}^2$, con la topología cociente es una variedad topológica.

Ejercicio 27 4 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(2) := \{M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}^2) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\mathrm{SO}(2)$ es una 1-variedad diferenciable difeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Calcula el espacio tangente a la identidad:

$$T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SO}(2).$$

Ejercicio 28 3 puntos

Demuestra que si consideramos a todos los conjuntos que son subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$ como objetos y a las funciones diferenciables entre ellos como morfismos, se obtiene una categoría.

Ejercicio 29 4 puntos

Demuestra que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una 2-variedad topológica.

Ejercicio 30 3 puntos

Demuestra que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciales, entonces existe una variedad diferenciable Z tal que se puede descomponer como unión ajena de dos subespacios tal que uno es difeomorfo a X y el otro a Y.

——— Fin de la tarea ———