# Topología diferencial I

## Tarea 5

Lista completa de ejercicios

| | |
|---|---|
| Fecha de aplicación | **2 de septiembre de 2024** |
| Fecha de entrega | **9 de septiembre de 2024** |
| Puntos requeridos | **5** |
| Puntos máximos posibles | **50** |

### Ejercicio 1 — 3 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable entre variedades.

Demuestra que la preimagen de cualquier valor regular de $f$ es una subvariedad de $X$. ¿cuál es su dimensión?

### Ejercicio 2 — 5 puntos

Considera la ecuación

$$y^2 + z^2 = x^3 - x$$

Demuestra que define una 2-variedad de $\mathbb{R}^3$ que denotaremos por $X$. Considera las funciones $f, g$ y $h$ que son las restricciones de las funciones coordenadas $x, y$ y $z$ a la variedad $X$.

Demuestra que dichas funciones son diferenciables. Encuentra todos los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y los conjuntos de nivel de las tres funciones. ¿cuáles de ellos son variedades?

### Ejercicio 3 — 5 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Calcula la diferencial de $F$ y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

### Ejercicio 4 — 3 puntos

Sea $X$ una variedad y $p \in X$ un punto arbitrario. Considera el conjunto de funciones localmente definidas en $p$ que definimos como sigue:

$$\mathrm{C}_p^\infty(X) \coloneqq \left\{ (f,\mathcal{U}) \,\middle|\, \begin{array}{l} f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ es una función } \mathrm{C}^\infty \\ \text{y } \mathcal{U} \text{ es una vecindad abierta de } p \end{array} \right\}.$$

Define operciones de suma, producto y producto por un escalar en dicho conjunto.

¿cuáles de los axiomas de $\mathbb{R}$-álgebra satisface dicho conjunto con esas operaciones? Demúestralo o exhibe contraejemplos según corresponda.

### Ejercicio 5 — 3 puntos

Si $X$ es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal $T$ que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de $p$ y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenads, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

### Ejercicio 6 — 3 puntos

Sea $X$ una variedad y $p \in X$ un punto arbitrario. Considera el conjunto de gérmenes de funciones en $p$ que definimos como sigue:

$$\mathcal{E}_p(X) \coloneqq \mathrm{C}_p^\infty(X)/\sim$$

donde $(f_1,\mathcal{U}_1) \sim (f_2,\mathcal{U}_2)$ si y solo si $f_1 = f_2$ en una vecindad abierta de $p$. Define operciones de suma, producto y producto por un escalar en dicho conjunto.

¿cuáles de los axiomas de $\mathbb{R}$-álgebra satisface dicho conjunto con esas operaciones? Demúestralo o exhibe contraejemplos según corresponda.

### Ejercicio 7 — 3 puntos

Sea $X$ una variedad, $p \in X$ un punto arbitrario y $v \in \mathrm{T}_p(X)$ un vector tangente.

Demuestra que la derivada direccional en la dirección de $v$ induce una derivación en el espacio de gérmenes en $p$.

Denotaremos dicha derivación como $\delta_v$.

Demuestra que la función que a cada vector tangente le asigna dicha derivación es un isomorfismo entre $\mathrm{T}_p(X)$ y $\mathrm{Der}_p(X)$.

### Ejercicio 8 — 3 puntos

Sea $X$ una variedad, $p \in X$ un punto arbitrario. Sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ una carta para $X$ definida en una vecindad de $p$.

Demuestra que toda derivación $\delta \in \mathrm{Der}_p(X)$ se puede expresar de la forma:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p^\varphi.$$

### Ejercicio 9 — 3 puntos

Sea $X$ una variedad y $p \in X$ un punto arbitrario.

Demuestra que la función cociente que a cada función localmente definida $(f,\mathcal{U})$ le asigna su gérmen es $\mathbb{R}$-lineal y multiplicativa.

**Ejercicio 10** 5 puntos

Considera la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde $a, b$ y $c$ son tres números reales distintos. Demuestra que define una 2-variedad de $\mathbb{R}^3$ que denotaremos por $X$. Considera las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que es la restricción de la función norma cuadrada a la variedad $X$.

Demuestra que dichas función es diferenciable. Encuentra todos los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y los conjuntos de nivel de la función. ¿cuáles de ellos son variedades?

**Ejercicio 11** 3 puntos

Sea $X$ una variedad y $p \in X$ un punto arbitrario. Definimos el conjunto de derivaciones en $p$ como sigue:

$$\mathrm{Der}_p(X) := \left\{ \delta \,\middle|\, \begin{array}{l} \delta : \mathcal{E}_p(X) \to \mathbb{R} \text{ es lineal} \\ \text{y satisface la regla de Leibniz} \end{array} \right\}.$$

Demuestra que $\mathrm{Der}_p(X)$ es un subespacio vectorial del espacio dual al espacio de gérmenes.

Demuestra que si $\delta$ es una derivación en $p$ y $(f, \mathcal{U})$ es una función constante, entonces $\delta([(f, \mathcal{U})]) = 0$.

**Ejercicio 12** 3 puntos

Demuestra el teorema del rango para funciones diferenciables entre variedades.

**Ejercicio 13** 3 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Calcula el espacio tangente a la identidad:

$$T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{SO}(n).$$

**Ejercicio 14** 5 puntos

Sea $X$ la superficie de revolución que se obtiene al girar el conjunto:

$$S = \{(x, 0, z) | (x-2)^2 + z^2 = 1\}$$

a lo largo del eje $z$. Considera la función $f : X \to \mathbb{R}$ que es la restricción de la función coordenada $x$.

Demuestra que $f$ es diferenciable. Encuentra todos los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y los conjuntos de nivel de $f$. ¿cuáles de ellos son variedades?

——— Fin de la tarea ———