

Topología diferencial I

Tarea 6

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	11 de septiembre de 2024
Fecha de entrega	17 de septiembre de 2024
Puntos requeridos	5
Puntos máximos posibles	8

Ejercicio 1

2 puntos

Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable como función de un subconjunto de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n si y solo si la correspondiente función $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido usual.

Ejercicio 2

2 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local entonces es un difeomorfismo sobre su imagen, misma que es abierta.

Ejercicio 3

2 puntos

Demuestra el lema de Hadamard:

Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida sobre un conjunto abierto de \mathbb{R}^n que es estrellado con respecto a un punto $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{U}$, entonces existen funciones diferenciables $g_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n g_i(x_i - p_i).$$

Además se cumple que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}|_p$.

Ejercicio 4

2 puntos

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que el rango de f es localmente no decreciente.

Ejercicio 5

3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n.$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 6

3 puntos

Sean X y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitrario. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable.

Demuestra que la función $f_* : \text{Der}_p X \rightarrow \text{Der}_{f(p)} Y$ dada por:

$$f_*(\delta)([g, \mathcal{U}]) := \delta([g \circ f, f^{-1}(\mathcal{U})])$$

está bien definida y es lineal.

Demuestra que la función $\mathcal{D} : T_p X \rightarrow \text{Der}_p X$ que a cada vector tangente le asigna la derivación dada por la derivada direccional con respecto a dicho vector es un isomorfismo lineal.

Demuestra que para todo vector $v \in T_p X$ se cumple:

$$f_*(\mathcal{D}(v)) = \mathcal{D}(D_p f(v)).$$

Ejercicio 7

3 puntos

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitrario. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable y sea $F : \mathcal{W} \rightarrow Y$ una extensión diferenciable de f a una vecindad abierta de p .

Sean $\varphi : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ y $\psi : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$ cartas de X y Y respectivamente y tales que $p \in \mathcal{U}_1$ y $f(p) \in \mathcal{U}_2$.

Sea $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ la representación en coordenadas de f .

Para todo vector $v = D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(w) \in T_p X$ demuestra que se cumple:

$$D_p F(v) = D_{\tilde{f}(\varphi(p))}\psi^{-1}(D_{\varphi(p)}\tilde{f}(w)).$$

Es decir, la diferencial de f se puede calcular con la diferencial de una extensión local de f o con la diferencial de la representación de f con respecto a cartas arbitrarias.

Ejercicio 8

3 puntos

Sean X y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitrario. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable.

Demuestra que la función $T_p^G f : T_p^G X \rightarrow T_{f(p)}^G Y$ dada por $T_p^G f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ es una función lineal.

Demuestra que la función $\mathcal{D}^G : T_p^G X \rightarrow \text{Der}_p X$ que a cada vector tangente geométrico $[\gamma]$ le asigna la derivación dada por

$$[(f, \mathcal{U})] \mapsto \left. \frac{df \circ \gamma}{dt} \right|_0$$

es un isomorfismo.

Demuestra que para todo vector $v \in T_p^G X$ se cumple:

$$f_*(\mathcal{D}^G(v)) = \mathcal{D}^G(T_p^G f(v)).$$

Ejercicio 9

2 puntos

Considera $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, que es una 1-variedad diferenciable. Describe explícitamente (mediante una base) al espacio tangente

$$T_x \mathbb{S}^1$$

para cada $x \in \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 10

2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Calcula el espacio tangente a la identidad:

$$T_{\mathrm{Id}} \mathrm{SO}(n).$$

Ejercicio 11

3 puntos

Sea X una k -variedad y $p \in X$.

Demuestra que la función

$$\mathbf{ev}_p : \mathfrak{M}_p / \mathfrak{M}_p^2 \times \mathrm{Der}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por $\mathbf{ev}_p([\alpha], \delta) := \delta(\alpha)$ es un apareamiento bilineal bien definido y no degenerado entre los espacios vectoriales $\mathfrak{M}_p / \mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)$, por lo que induce un isomorfismo entre $\mathfrak{M}_p / \mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)^*$.

Ejercicio 12

2 puntos

Sea X una k -variedad y $p \in X$. Demuestra que la función evaluación:

$$\mathrm{ev}_p : \mathcal{E}_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $\mathrm{ev}_p([(f, \mathcal{U})]) := f(p)$ está bien definida y es un morfismo de \mathbb{R} -álgebras. Demuestra que su núcleo es el único ideal maximal de $\mathcal{E}_p(X)$. Denotaremos dicho ideal por \mathfrak{M}_p .

Ejercicio 13

4 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ una k -variedad.

Definimos el conjunto $\mathrm{T}X \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ como sigue:

$$\mathrm{T}X := \{(p, v) \mid p \in X \text{ y } v \in \mathrm{T}_p X\}.$$

Demuestra que dicho conjunto es una $2k$ -variedad. A dicha variedad se le llama el haz tangente a X .

Ejercicio 14

2 puntos

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función diferenciable, demuestra que la diferencial de f define una función diferenciable de $\mathrm{T}X$ en $\mathrm{T}Y$.

Ejercicio 15

3 puntos

Demuestra que el haz tangente al círculo $\mathrm{T}\mathbb{S}^1$ es una 2-variedad difeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$.

Ejercicio 16

2 puntos

Demuestra que si $f : X \rightarrow Y$ es una inmersión inyectiva con X una variedad compacta, entonces su imagen es una subvariedad de Y y f es un difeomorfismo entre X y dicha subvariedad.

Ejercicio 17

2 puntos

Exhibe un ejemplo de una inmersión inyectiva tal que su imagen no sea una subvariedad.

Ejercicio 18

2 puntos

Sean X y Y dos variedades. Demuestra que si $Y \subseteq X$, entonces Y es una subvariedad de X .

Ejercicio 19

2 puntos

Sea X una variedad y Y una subvariedad de X . Demuestra que la función de inclusión de Y en X es una inmersión inyectiva.

Ejercicio 20

2 puntos

Sea $f : X \rightarrow Y$ una sumersión. Demuestra que f es una función abierta.

Ejercicio 21

2 puntos

Sea X una k -variedad y $p \in X$.

Definimos el tangente geométrico a X en p como el conjunto:

$$\mathrm{T}_p^G X := \left\{ [\gamma] \left| \begin{array}{l} \gamma : (a, b) \rightarrow X \\ \text{es una función diferenciable} \\ \text{tal que } 0 \in (a, b) \text{ y } \gamma(0) = p \end{array} \right. \right\}$$

donde $[\gamma] = [\eta]$ si y solo si $\dot{\gamma}(0) = \dot{\eta}(0)$.

Define operaciones de suma y producto por un escalar en dicho conjunto de tal forma que la función que a cada clase $[\gamma]$ le asigna $\dot{\gamma}(0)$ sea un isomorfismo entre $\mathrm{T}_p^G X$ y $\mathrm{T}_p X$.

Ejercicio 22

2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto que satisface que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ que

$$\varphi(\mathcal{U} \cap X) = \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Demuestra que X es una k -variedad.

Ejercicio 23

2 puntos

Si X es una k -variedad de \mathbb{R}^n y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de \mathbb{R}^n , abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad

de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k)) | (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenadas, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 24

2 puntos

Si X es una k -variedad de \mathbb{R}^n y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un subconjunto de k funciones coordenadas x_{i_1}, \dots, x_{i_k} tales que la función

$$f(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

restringida a una vecindad abierta de p en X es una carta coordenada.

Ejercicio 25

2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto que satisface que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ que

$$\varphi(\mathcal{U} \cap X) = \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Demuestra que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ que es una sumersión y además cumple:

$$f^{-1}(0) = \mathcal{U} \cap X.$$

Ejercicio 26

2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\text{SO}(n) := \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \text{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\text{SO}(n)$ es una variedad diferenciable.

Ejercicio 27

2 puntos

Un k -marco ortonormal en \mathbb{R}^n es una k -tupla de vectores (v_1, \dots, v_k) ortornomales.

Considera el conjunto $V_n^k \subseteq \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ de k -marcos.

Demuestra que dicho conjunto es una variedad y calcula su dimensión. A dicho conjunto se le llama una variedad de Stiefel.

Ejercicio 28

2 puntos

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que f es diferenciable si y solo si para todo punto $p \in X$ existen cartas coordenadas $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de X y Y respectivamente y tales que $p \in \mathcal{U}$, $f(p) \in \mathcal{V}$ y además la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el sentido usual de cálculo.

Ejercicio 29

2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$M_r(m \times n) := \{M \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}) | M \text{ es de rango } r\}.$$

Demuestra que dicho conjunto es una variedad y calcula su dimensión.

Ejercicio 30

2 puntos

Demuestra que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciables, entonces existe una variedad diferenciable Z tal que se puede descomponer como unión ajena de dos subespacios tal que uno es difeomorfo a X y el otro a Y .

_____ Fin de la tarea _____