Topología diferencial I

Tarea 8

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**26 de septiembre de 2024**
Fecha de entrega	**3 de octubre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**52**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $t : T_1^1(V) \to \mathbb{R}$ tal que $t(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$.

Si $T \in L(V,V)$ es una transformación lineal que en alguna base β de V está dada por una matríz M, y ω_T es el $\binom{1}{1}$-tensor que naturalmente corresponde T, calcula $t(\omega_T)$ en términos de M.

Ejercicio 2 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $\sigma : T_0^2(V) \to T_0^2(V)$ tal que

$$\sigma(\alpha \otimes \omega) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \omega + \omega \otimes \alpha).$$

A la imagen de σ se le llama el espacio de tensores simétricos y se denota $S^2(V)$ y al núcleo se le llama el espacio de tensores alternantes y se denota $\Lambda^2(V)$. A partir de una base para V encuentra bases para dichos espacios y calcula su dimensión.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Considera la función $\wedge : T_0^1(V) \times T_0^1(V) \to \Lambda^2(V)$ dada por $\wedge(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)$. Es común escribir $\alpha \wedge \beta$ en vez de $\wedge(\alpha, \beta)$.

Demuestra que dicha función está bien definida, que es bilineal y además antisimétrica, es decir: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

Demuestra que si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base para $T_0^1(V)$, entonces el conjunto:

$$\{\alpha_i \wedge \alpha_j\}_{i<j}$$

es una base para $\Lambda^2(V)$.

Ejercicio 4 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es alternante si para cualquier vector $v \in V$ se cumple $\omega(v,v) = 0$.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es antisimétrica si para cualesquiera dos vectores $v, w \in V$ se cumple $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$.

Demuesra que una forma bilineal es alternante si y solo si es antisimétrica.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T_0^2(V)$ es no-degenerada si para todo vector no nulo $v \in V$ existe algún otro vector $w \in V$ tal que $\omega(v,w) \neq 0$.

Demuestra que si ω es una forma bilineal alternante y no-degenerada, entonces la dimensión de V es par y además existe una base para V $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_m, w_m$ tal que se cumple:

$$\omega(v_i, w_i) = 1$$

$$\omega(w_i, v_i) = -1$$

y

$$\omega(w_i, v_j) = 0$$

en los demás casos.

Ejercicio 6 — 2 puntos

Dada una 1-forma diferencial ω sobre una variedad X y una curva diferenciable $\gamma : [a,b] \to X$ definimos la integral de ω a lo largo de γ como sigue:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b D_t\gamma^*(\omega_{\gamma(t)})dt.$$

Demuestra que si $\omega = df$ para alguna función $f : X \to \mathbb{R}$ entonces para cualquier curva $\gamma : [a,b] \to X$ se cumple:

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Ejercicio 7 — 3 puntos

Dadas dos curvas $\gamma_1 : [a,b] \to X$ y $\gamma_2 : [a,b] \to X$, decimos que son diferenciablemente homotópicas relativas a los extremos si existe una función diferenciable $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to X$ tal que $\gamma_1(t) = \Gamma(0,t)$, tal que $\gamma_2(t) = \Gamma(1,t)$ y además $\Gamma(s,a) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\Gamma(s,b) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

Decimos que una 1-forma ω sobre X es cerrada si localmente es igual a df para alguna función f.

Demuestra que si ω es una forma cerrada, y γ_1 γ_2 son dos curvas diferenciablemente homotópicas entonces se cumple que

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Ejercicio 8 — 3 puntos

Considera la 1-forma diferencial $d\theta$ definida sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por:

$$d\theta = \frac{1}{x^2+y^2}\left(xdy - ydx\right).$$

Demuestra que localmente $d\theta$ es igual a df para alguna función f pero no globlamente, es decir, no existe una función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $d\theta = df$.

Ejercicio 9 — 2 puntos

Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable como función de un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ si y solo si la correspondiente función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido usual.

Ejercicio 10 — 2 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local entonces es un difeomorfismo sobre su imagen, misma que es abierta.

Ejercicio 11 — 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que el rango de f es localmente no decreciente.

Ejercicio 12 — 3 puntos

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitario. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable y sea $F : \mathcal{W} \to Y$ una extensión diferenciable de f a una vecindad abierta de p.

Sean $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ y $\psi : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{V}_2$ cartas de X y Y respectivamente y tales que $p \in \mathcal{U}_1$ y $f(p) \in \mathcal{U}_2$

Sea $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ la representación en coordenadas de f.

Para todo vector $v = D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(w) \in \mathrm{T}_p\, X$ demuestra que se cumple:

$$D_pF(v) = D_{\tilde{f}(\varphi(p))}\psi^{-1}(D_{\varphi(p)}\tilde{f}(w))$$

Es decir, la diferencial de f se puede calcular con la diferencial de una extensión local de f o con la diferencial de la representación de f con respecto a cartas arbitrarias.

Ejercicio 13 — 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 14 — 3 puntos

Sean X y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitario. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable.

Demuestra que la función $f_* : \mathrm{Der}_p\, X \to \mathrm{Der}_{f(p)}\, Y$ dada por:

$$f_*(\delta)([g,\mathcal{U}]) := \delta([g \circ f, f^{-1}(\mathcal{U})])$$

está bien definida y es lineal.

Demuestra que la función $\mathcal{D} : T_pX \to \mathrm{Der}_p\, X$ que a cada vector tangente le asigna la derivación dada por la derivada direccional con respecto a dicho vector es un isomorfismo lineal.

Demuestra que para todo vector $v \in T_pX$ se cumple:

$$f_*(\mathcal{D}(v)) = \mathcal{D}(D_pf(v)).$$

Ejercicio 15 — 3 puntos

Sea X una k-variedad y $p \in X$.

Demuestra que la función

$$\mathfrak{ev} : \mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2 \times \mathrm{Der}_p(X) \to \mathbb{R}$$

dada por $\mathfrak{ev}([\alpha],\delta) := \delta(\alpha)$ es un apareamiento bilineal bien definido y no degenerado entre los espacios vectoriales $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)$, por lo que induce un isomorfismo entre $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)^*$.

Ejercicio 16 — 2 puntos

Demuestra que si $f : X \to Y$ es una inmersión inyectiva con X una variedad compacta, entonces su imagen es una subvariedad de Y y f es un difeomorfismo entre X y dicha subvariedad.

Ejercicio 17 — 2 puntos

Sean X y Y dos variedades. Demuestra que si $Y \subseteq X$, entonces Y es una subvariedad de X.

Ejercicio 18 — 2 puntos

Sea X una varidad y Y una subvariedad de X. Demuestra que la función de inclusión de Y en X es una inmersión inyectiva.

Ejercicio 19 — 2 puntos

Sea X una k-variedad y $p \in X$.

Definimos el tangente geométrico a X en p como el conjunto:

$$\mathrm{T}_p^G\, X := \left\{ [\gamma] \;\middle|\; \begin{array}{c} \gamma : (a,b) \to X \\ \text{es una función diferenciable} \\ \text{tal que } 0 \in (a,b) \text{ y } \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

donde $[\gamma] = [\eta]$ si y solo si $\dot{\gamma}(0) = \dot{\eta}(0)$.

Define operaciones de suma y producto por un escalar en dicho conjunto de tal forma que la función que a cada clase $[\gamma]$ le asigna $\dot{\gamma}(0)$ sea un isomorfismo entre $\mathrm{T}_p^G\, X$ y $\mathrm{T}_p\, X$.

Ejercicio 20 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un subconjunto de k funciones coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ tales que la función

$$f(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

restringida a una vecindad abierta de p en X es una carta coordenada.

Ejercicio 21 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenads, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 22 2 puntos

Un k-marco ortonormal en $\mathbb{R}^n$ es una k-tupla de vectores $(v_1, \ldots, v_k)$ ortornomales.

Considera el conjunto $\mathrm{V}_n^k \subseteq \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ de k-marcos.

Demuestra que dicho conjunto es una variedad y calcula su dimensión. A dicho conjunto se le llama una variedad de Stiefel.

Ejercicio 23 2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) \coloneqq \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\mathrm{SO}(n)$ es una variedad diferenciable.

——— Fin de la tarea ———