Topología diferencial I

Tarea 9

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**4 de octubre de 2024**
Fecha de entrega	**10 de octubre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**34**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $t : T^1_1(V) \to \mathbb{R}$ tal que $t(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$.

Si $T \in L(V, V)$ es una transformación lineal que en alguna base β de V está dada por una matríz M, y ω_T es el $\binom{1}{1}$-tensor que naturalmente corresponde T, calcula $t(\omega_T)$ en términos de M.

Ejercicio 2 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Considera la función $\wedge : T^1_0(V) \times T^1_0(V) \to \Lambda^2(V)$ dada por $\wedge(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)$. Es común escribir $\alpha \wedge \beta$ en vez de $\wedge(\alpha, \beta)$.

Demuestra que dicha función está bien definida, que es bilineal y además antisimétrica, es decir: $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.

Demuestra que si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una base para $T^1_0(V)$, entonces el conjunto:

$$\{\alpha_i \wedge \alpha_j\}_{i<j}$$

es una base para $\Lambda^2(V)$.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Decimos que una forma bilineal $\omega \in T^2_0(V)$ es no-degenerada si para todo vector no nulo $v \in V$ existe algún otro vector $w \in V$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$.

Demuestra que si ω es una forma bilineal alternante y no-degenerada, entonces la dimensión de V es par y además existe una base para V $v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_m, w_m$ tal que se cumple:

$$\omega(v_i, w_i) = 1$$
$$\omega(w_i, v_i) = -1$$

y

$$\omega(w_i, v_j) = 0$$

en los demás casos.

Ejercicio 4 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $\sigma : T^2_0(V) \to T^2_0(V)$ tal que

$$\sigma(\alpha \otimes \omega) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \omega + \omega \otimes \alpha).$$

A la imagen de σ se le llama el espacio de tensores simétricos y se denota $S^2(V)$ y al núcleo se le llama el espacio de tensores alternantes y se denota $\Lambda^2(V)$. A partir de una base para V encuentra bases para dichos espacios y calcula su dimensión.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que el rango de f es localmente no decreciente.

Ejercicio 6 — 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 7 — 2 puntos

Sea X una k-variedad y $p \in X$.

Demuestra que la función

$$\mathfrak{ev} : \mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2 \times \mathrm{Der}_p(X) \to \mathbb{R}$$

dada por $\mathfrak{ev}([\alpha], \delta) := \delta(\alpha)$ es un apareamiento bilineal bien definido y no degenerado entre los espacios vectoriales $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)$, por lo que induce un isomorfismo entre $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\mathrm{Der}_p(X)^*$.

Ejercicio 8 — 2 puntos

Demuestra que si $f : X \to Y$ es una inmersión inyectiva con X una variedad compacta, entonces su imagen es una subvariedad de Y y f es un difeomorfismo entre X y dicha subvariedad.

Ejercicio 9 — 2 puntos

Exhíbe un ejemplo de una variedad X de dimensión por lo menos 2, una variedad Y de dimensión por lo menos 3, una subvariedad Z de Y de dimensión por lo menos 2 y una función $f : X \to Y$ que no sea transversal a Z pero que la preimagen $f^{-1}(Z)$ sea una subvariedad de la dimensión correcta.

Ejercicio 10 2 puntos

Sea $T : V \to V$ un endomorfidmo lineal de un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\Delta \subseteq V \times V$ la diagonal. Demuestra que $W = \{(v, Tv) | v \in V\}$ es transversal a Δ si y solo si 1 no es valor propio de T.

Ejercicio 11 2 puntos

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos transformaciones diferenciables entre variedades lisas. Sea W una subvariedad de Z y asume que g es transversal a W.

Sea Z una subvariedad de Y y asume que f es transversal a Z.

Demuestra que f es transversal a $g^{-1}(W)$ si y solo si $g \circ f$ es transversal a W.

Ejercicio 12 3 puntos

Sea $f : X \to X$ una transformación diferenciable de una variedad en si misma. Si $p \in X$ es un punto fijo de f, decimos que es de Leftscetz si 1 no es valor propio de $D_p f : T_p X \to T_p X$. Si todos los puntos fijos de f son de Lefschetz, entonces decimos que f es de Lefschetz.

Demuestra que si f es una función de Lefschetz y X es compacta, entonces f tiene una cantidad finita de puntos fijos.

Ejercicio 13 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una transformación diferenciable entre variedades lisas. Sea Z una subvariedad de Y y asume que f es transversal a Z.

Demuestra que si $p \in f^{-1}(Z)$ entonces se cumple:

$$T_p f^{-1}(Z) = (D_p f)^{-1}(T_{f(p)} Z)$$

Ejercicio 14 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenads, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 15 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un subconjunto de k funciones coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ tales que la función

$$f(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

restringida a una vecindad abierta de p en X es una carta coordenada.

Ejercicio 16 2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\mathrm{SO}(n)$ es una variedad diferenciable.

Fin de la tarea